

## UNA EXPRESIÓN PARA LA FUERZA HIDRODINÁMICA SOBRE UN CUERPO INTERACTUANDO CON LA ESTELA DEL CUERPO DE ADELANTE

### AN EXPRESSION FOR THE HYDRODYNAMIC FORCE ON A BODY INTERACTING WITH THE LEADING BODY WAKE

J. Ramírez-Muñoz\* y A. Soria

*Grupo de Sistemas Interfaciales y Multifásicos. Departamento de I.P.H., Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. Apdo. Post. 55-534, 09340, México D. F., México.*

Recibido 5 de Junio 2006; Aceptado 25 de Octubre 2006

#### Resumen

Presentamos un estudio hidrodinámico de la interacción de dos cuerpos esféricos del mismo diámetro alineados en la dirección de un flujo uniforme, newtoniano e incompresible. La solución asintótica para la estela de un cuerpo aislado se aplica a la interacción con un segundo cuerpo localizado en la estela laminar del cuerpo de adelante. Al igualar el defecto del flujo en la estela con el arrastre sobre el cuerpo y considerar el gradiente de presión, se obtuvo una expresión para la fuerza hidrodinámica sobre el cuerpo de atrás. La expresión es válida en el intervalo de número de Reynolds  $24 < Re < 130$  y tiene un parámetro, el cual representa la razón entre una velocidad característica del flujo incidente sobre el cuerpo de atrás y la velocidad del flujo uniforme. El valor del parámetro se determinó con mediciones experimentales reportadas en la literatura. Al considerar el efecto total de la estela únicamente como una disminución del arrastre local sobre el cuerpo de atrás (sin tomar en cuenta el efecto repulsivo del gradiente de presión), se encontró que se subestima la fuerza hidrodinámica en aproximadamente un 10%, para pequeñas distancias de separación entre los cuerpos.

**Palabras clave:** fuerza hidrodinámica, arrastre cuasiestacionario, interacción partícula-partícula, interacción hidrodinámica, estela laminar.

#### Abstract

We present a hydrodynamic study of the interaction of two equal-size spherical bodies arranged in-line with a uniform, Newtonian, and incompressible flow. The asymptotic wake velocity solution for an isolated body is applied to the interaction with a trailing body placed in the leading body laminar wake. By equating the flow defect in the wake to the drag on the trailing body and considering the pressure gradient, an expression for the hydrodynamic force on this body was obtained. The expression is valid in the Reynolds number range  $24 < Re < 130$  and has a parameter, which represents the ratio between a characteristic velocity of the flow incident on the trailing body and the uniform flow velocity incident on the leading body. The parameter value was assessed by using experimental data reported in the literature. By considering that the whole wake effect is equivalent to local drag reduction on the trailing body only (i.e. without consideration of the pressure gradient repulsive effect), an underestimation of the hydrodynamic force in approximately 10% was found for small separation distances between the spheres.

**Keywords:** hydrodynamic force, quasisteady drag, particle-particle interaction, hydrodynamic interaction, laminar wake.

#### 1. Introducción

La determinación de las fuerzas hidrodinámicas en un sistema multifásico disperso, compuesto de un sistema de partículas (sólidas, líquidas o gaseosas) inmersas en una fase fluida continua, es crucial en una gran cantidad de problemas de ingeniería. La fuerza hidrodinámica sobre una partícula cambia considerablemente si la partícula está aislada o se encuentra en presencia de

otras partículas. Una comprensión total de los diversos mecanismos de interacción de un gran número de partículas moviéndose en un dispositivo industrial (columna de burbujeo, equipo de sedimentación, columna de fluidización, etc.) está lejos de ser alcanzada en la actualidad. Casos particulares, pero aún realistas y útiles, son la interacción en línea de un par o de un tren de partículas.

\* Autor para la correspondencia: E-mail: cbi204180545@xanum.uam.mx  
Tel. (55) 58-04-46-48 Ext. 237 Fax: (55) 58-04-49-00

Independientemente de la naturaleza física de los cuerpos (burbujas, partículas sólidas), a números de Reynolds intermedios ( $Re \approx 100$ ), el flujo detrás de esferas sólidas y burbujas tiene características similares, particularmente en la región lejana de la estela laminar. Consecuentemente, es una práctica común en la literatura (Ruzicka, 2000 y 2005; Zhang y Fan 2003), suponer una dinámica de interacción similar entre un par de burbujas y un par de partículas sólidas.

La ecuación de movimiento para una esfera sólida pequeña moviéndose en el régimen de flujo reptante ( $Re \ll 1$ ) en un flujo transitorio no-uniforme fue derivada por Maxey y Riley (1983), mientras que para  $Re$  intermedios; Mei y col. (1994), propusieron una descomposición de fuerzas similar a las existentes en la ecuación de movimiento de Maxey y Riley (1983). La expresión de la fuerza hidrodinámica que Mei y col. proponen, incorpora el efecto de la aceleración lagrangiana del fluido y el efecto de masa agregada (fuerzas inerciales no viscosas), la fuerza de frenado por disipación viscosa debida al rozamiento (arrastre cuasiestacionario) y la fuerza transitoria debida a la disipación de vorticidad en la superficie de la esfera (término histórico de fuerza).

Lawrence y Mei (1995), estudiaron el efecto de la fuerza de arrastre del fluido sobre un cuerpo en periodos largos de tiempo, cuando el campo de velocidad de un flujo uniforme y estacionario se incrementa súbitamente dando lugar a otro estado estacionario. Partiendo de balances globales de masa y cantidad de movimiento sobre un volumen de control, obtuvieron expresiones para estimar el arrastre. Además, propusieron relaciones simples entre el defecto del flujo en la estela y el arrastre sobre el cuerpo.

En mediciones directas de la fuerza hidrodinámica sobre una partícula interactuando con la estela de la partícula de adelante a  $Re$  intermedios, Zhu y col. (1994) y Chen y Wu (2000) encontraron que, ésta es dependiente del número de Reynolds e inferior a la de la partícula de adelante. Además, se reduce al disminuir la separación entre partículas. Por otra parte, se observó que la partícula de adelante únicamente se ve afectada significativamente por la presencia de la partícula de atrás, a distancias de separación inferiores a la longitud de los anillos vorticosos que se forman detrás de la partícula de adelante. Estudios numéricos existentes en la literatura han reproducido este mismo comportamiento (Yuan y Prosperetti, 1994; Ruzicka 2000). Zhang y Fan (2002) obtuvieron una expresión semianálitica para la fuerza hidrodinámica de una esfera interactuando con la estela laminar de la esfera de adelante. Ellos consideraron a la fuerza de arrastre viscosa, despreciando cualquier efecto inercial adicional. No obstante que el arrastre viscoso es la fuerza dominante, debido a la existencia de un gradiente de presión en la estela, se ejercen fuerzas

inerciales repulsivas sobre el cuerpo de atrás (Lamb, 1932; Ruzicka, 2000). Esto sugiere que las fuerzas de presión deberían ser consideradas; sin embargo, es necesario determinar la importancia de dicha contribución.

El objetivo de este trabajo es analizar el problema nuevamente a partir de sus fundamentos y desarrollar una expresión para la fuerza hidrodinámica, que a diferencia de los autores mencionados arriba, considere explícitamente las fuerzas de presión. Para ello la solución asintótica en la estela de una esfera aislada, se aplica a la esfera de atrás. Se elige un volumen de control que encierre al cuerpo de atrás y se iguala la pérdida de flujo de cantidad de movimiento en la superficie de control a la fuerza hidrodinámica que ejerce el fluido sobre el cuerpo. Además, al usar la componente axial de la ecuación de movimiento para evaluar el campo de presión, se obtiene una expresión de la fuerza hidrodinámica cuyos términos incluyen el arrastre en la estela y las fuerzas de presión. La expresión obtenida es comparada con datos experimentales de Zhu y col. (1994), mostrando una mejor predicción respecto al modelo de Zhang y Fan (2002), el cual no considera el efecto repulsivo del gradiente de presión.

## 2. Metodología

### 2.1 Perfil de velocidad asintótico en la estela laminar de un cuerpo esférico

Consideremos un cuerpo fijo esférico inmerso en un flujo uniforme, estacionario, newtoniano e incompresible (Fig. 1).

En este contexto,  $u_1$  denotará la velocidad constante del flujo uniforme que incide sobre la esfera; la dirección de  $u_1$  se toma como la coordenada axial  $s$  de un sistema coordenado cilíndrico, con su origen anclado en la esfera. Para  $Re$  intermedios ( $24 < Re < 130$ ) y distancias adimensionales de separación  $s/d > Re^{-1}$ , la diferencia entre la corriente uniforme de fluido  $u_1$  y el flujo en la estela  $w(r,s)$  es pequeña comparada con  $u_1$ . Además, la estela es laminar, estacionaria y tiene simetría axial (Batchelor, 1967). Al igualar la pérdida del flujo de cantidad de movimiento entre dos planos infinitos  $s = \text{constante}$  (uno de ellos corriente arriba y el otro lejos corriente abajo), se obtiene la siguiente expresión para la componente axial del perfil de velocidad asintótico (Batchelor, 1967; Schlichting, 1979):

$$\frac{w(r,s)}{u_1} = 1 - \frac{C_{d1}}{32} \frac{d}{s} Re_1 \exp\left(-\frac{u_1 r^2}{4\nu s}\right), \quad (1)$$

donde  $r$  es la coordenada radial,  $Re_1 = u_1 d / \nu$  y  $C_{d1}$  son el número de Reynolds de partícula y el coeficiente de arrastre estacionario (referido al área frontal proyectada por la esfera). Además,  $d$  y  $\nu$  son el diámetro del cuerpo y la viscosidad cinemática del

fluido. Como se muestra en la Fig. 1, es posible elegir un marco de referencia de laboratorio ( $x, y, z$ ). Sin embargo, si ambos marcos de referencia están fijos, la velocidad del campo de flujo observada en ambos sistemas coordenados es idéntica. Por lo tanto, se relacionan únicamente por una constante arbitraria de traslación,  $z = R_1 + s$ , siendo  $R_1$  la distancia entre orígenes. Con la finalidad de simplificar el análisis, en este estudio se utiliza sólo el marco de referencia anclado en la esfera.

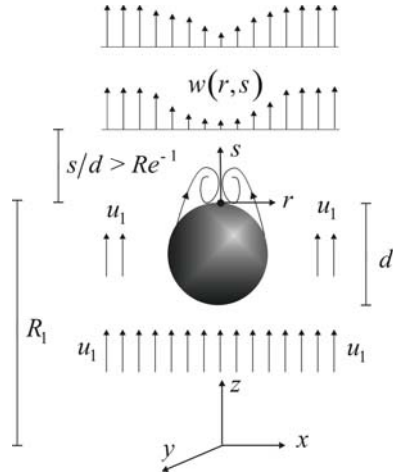


Fig. 1. Estela laminar detrás de un cuerpo esférico para  $24 < Re < 130$ .

La fuerza hidrodinámica sobre el cuerpo mostrado en la Fig. 1 es únicamente la fuerza de arrastre estacionaria ( $F_{d1}$ ), la cual se suele expresar como

$$F_{d1} = C_{d1} \frac{\pi}{4} d^2 \frac{1}{2} \rho u_1^2, \quad (2)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido.

## 2.2 Fuerza hidrodinámica sobre un cuerpo esférico interactuando con la estela laminar de otro cuerpo

En la Fig. 2 se muestra el sistema a estudiar, el cual consiste de dos esferas sólidas del mismo diámetro alineadas en la dirección de un flujo uniforme.

Esta figura corresponde al arreglo experimental de Zhu y col. (1994) quienes reportan mediciones de la fuerza hidrodinámica sobre un par de esferas interactuando con la estela de la esfera de adelante. En sus mediciones, ambas esferas fueron mantenidas a una distancia fija para cada experimento específico. Tomando como referencia el flujo ascendente, la esfera corriente abajo se denotará como la de *detrás*, mientras que la esfera corriente arriba es la de *adelante*. Además, se supondrá que la esfera de atrás se encuentra localizada en la estela de la esfera de adelante, fuera de la región de los anillos vorticosos. El flujo que incide sobre la esfera de adelante es uniforme; no obstante, este cuerpo induce

un flujo no-uniforme sobre la esfera de atrás. Este es el único mecanismo de interacción tomado en cuenta en este análisis, esto se logra al considerar tanto el efecto repulsivo de las fuerzas de presión como la reducción del arrastre local debido al efecto de *escudo* del cuerpo de adelante.

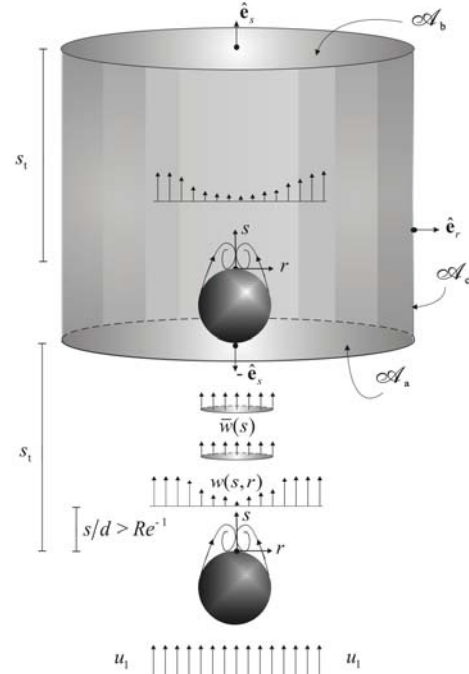


Fig. 2. Dos esferas fijas interactuando con la estela laminar de la esfera de adelante.

El flujo total de cantidad de movimiento (impulso), que incluye tanto el flujo inercial y la presión dinámica (Landau y Lifshitz, 1958), así como el flujo viscoso, evaluados en una superficie fija arbitraria  $\mathcal{A}$  que contiene al cuerpo de atrás es

$$\oint_{\mathcal{A}} [-\hat{n} \cdot \rho \mathbf{w} \mathbf{w} + \hat{n} \cdot (-p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau})] dA, \quad (3)$$

donde  $\hat{n}$  es el vector normal unitario orientado hacia el exterior de la superficie  $\mathcal{A}$ ,  $\mathbf{w}$  el campo de velocidad en la estela,  $p$  la presión dinámica (presión del medio sobre un punto de la superficie de control debido al movimiento del fluido),  $\mathbf{I}$  el tensor unitario y  $\boldsymbol{\tau}$  el tensor de esfuerzos viscosos.

El flujo neto de cantidad de movimiento sobre la superficie  $\mathcal{A}$  es la diferencia entre el flujo que entra y el que sale. Pero esta diferencia es, a su vez, la cantidad de movimiento total que pasa en la unidad de tiempo desde el fluido hacia el cuerpo (Landau y Lifshitz, 1958; Batchelor 1967; Schlichting, 1979); es decir, la fuerza hidrodinámica  $\mathbf{F}$  que resulta del movimiento del fluido o contribución cinética:

$$\mathbf{F} \doteq \oint_{\mathcal{A}} [-\hat{n} \cdot \rho \mathbf{w} \mathbf{w} + \hat{n} \cdot (-p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau})] dA. \quad (4)$$

Eligiendo como volumen de control el cilindro mostrado en la Fig. 2, la superficie de control puede

descomponerse en las superficies de las tapas inferior ( $\mathcal{A}_a$ ), superior ( $\mathcal{A}_b$ ) y del cuerpo ( $\mathcal{A}_c$ ), donde  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_a \oplus \mathcal{A}_b \oplus \mathcal{A}_c$ . Por lo tanto, la Ec. (4) puede también expresarse como

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & \int_{\mathcal{A}_a} [-\hat{\mathbf{n}}_a \cdot \rho \mathbf{w} \mathbf{w} + \hat{\mathbf{n}}_a \cdot (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau})] dA \\ & + \int_{\mathcal{A}_b} [-\hat{\mathbf{n}}_b \cdot \rho \mathbf{w} \mathbf{w} + \hat{\mathbf{n}}_b \cdot (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau})] dA \\ & + \int_{\mathcal{A}_c} [-\hat{\mathbf{n}}_c \cdot \rho \mathbf{w} \mathbf{w} + \hat{\mathbf{n}}_c \cdot (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau})] dA. \end{aligned} \quad (5)$$

Dado que en el caso de estudio ambos cuerpos tienen el mismo eje de simetría y el flujo es paralelo a este eje, la fuerza de sustentación es cero (*cfr.* Landau y Lifshitz, 1958). Así pues, la fuerza hidrodinámica se reduce a su componente axial. Además, al considerar que en la región lejana de la estela laminar detrás de ambos cuerpos (fuera de la región de los anillos vorticosos) se cumple que  $\mathbf{w} = w(r, s)\hat{\mathbf{e}}_s$ ; entonces, a partir de la Ec. (5) se obtiene

$$\begin{aligned} F = & \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{e}}_s \\ = & \int_{\mathcal{A}_a} [-\hat{\mathbf{n}}_a \cdot (\rho w^2 \hat{\mathbf{e}}_s \hat{\mathbf{e}}_s) \cdot \hat{\mathbf{e}}_s + \hat{\mathbf{n}}_a \cdot (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_s] dA \\ & + \int_{\mathcal{A}_b} [-\hat{\mathbf{n}}_b \cdot (\rho w^2 \hat{\mathbf{e}}_s \hat{\mathbf{e}}_s) \cdot \hat{\mathbf{e}}_s + \hat{\mathbf{n}}_b \cdot (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_s] dA \\ & + \int_{\mathcal{A}_c} [-\hat{\mathbf{n}}_c \cdot (\rho w^2 \hat{\mathbf{e}}_s \hat{\mathbf{e}}_s) \cdot \hat{\mathbf{e}}_s + \hat{\mathbf{n}}_c \cdot (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_s] dA. \end{aligned} \quad (6)$$

Sustituyendo la definición del vector normal en cada superficie:  $\hat{\mathbf{n}}_a = -\hat{\mathbf{e}}_s$ ,  $\hat{\mathbf{n}}_b = \hat{\mathbf{e}}_s$  y  $\hat{\mathbf{n}}_c = \hat{\mathbf{e}}_r$  en la expresión anterior, tomando en cuenta que  $\boldsymbol{\tau} = \tau_{rs}\hat{\mathbf{e}}_r\hat{\mathbf{e}}_s + \tau_{ss}\hat{\mathbf{e}}_s\hat{\mathbf{e}}_s$  y la derivada radial de la velocidad  $\partial w/\partial r$  es grande en comparación con la axial  $\partial w/\partial s$  (Landau y Lifshitz, 1958); consecuentemente,  $\tau_{ss} \ll \tau_{rs}$  y considerando además que la superficie de ambas tapas es idéntica ( $\mathcal{A}_a = \mathcal{A}_b = \mathcal{A}_s$ ) se obtiene

$$\begin{aligned} F = & \int_{\mathcal{A}_s} [\rho w_a^2 - \rho w_b^2] dA - \int_{\mathcal{A}_s} [p_a - p_b] dA \\ & + \int_{\mathcal{A}_c} \tau_{rs} dA. \end{aligned} \quad (7)$$

La última integral en la Ec. (7) puede interpretarse como la densidad de flujo viscoso en la dirección radial sobre la frontera lateral del cilindro. Así, la capa de fluido que se mueve en la dirección axial sobre la frontera comunica parte de su cantidad de movimiento a la capa adyacente de fluido, y en consecuencia, ésta se mantiene en movimiento en la misma dirección. Sin embargo, si la frontera lateral del cilindro se coloca lejos de la esfera, se tiene que sobre dicha frontera  $\partial w/\partial r \rightarrow 0$ , por lo tanto,  $\tau_{rs} \cong 0$ . Así, el flujo neto de cantidad de movimiento sobre  $\mathcal{A}$  se reduce a la diferencia entre el flujo

inercial y de presión que entra en la tapa inferior y el que sale en la tapa superior, es decir,

$$F = \int_{\mathcal{A}_a} [\rho w_a^2 - \rho w_b^2] dA - \int_{\mathcal{A}_b} [p_a - p_b] dA. \quad (8)$$

El primer término del lado derecho de la expresión anterior representa el déficit (pérdida) de flujo inercial, respecto al flujo inercial existente en ausencia del cuerpo. Por lo tanto, es razonable asociar este déficit (al igual que para el caso de un cuerpo aislado) al arrastre cuasiestacionario que ejerce el fluido sobre el cuerpo de atrás, es decir

$$F_{d2} \cong \rho \int_{\mathcal{A}_s} [w_a^2 - w_b^2] dA. \quad (9)$$

Debe considerarse que el obtener una expresión analítica para el arrastre sobre un cuerpo inmerso en un flujo altamente no-uniforme (en la dirección transversal al flujo) a  $Re$  intermedios no es una tarea sencilla (*cfr.* Katz y Meneveau, 1996). Sin embargo, una forma de estimar el arrastre sobre la esfera de atrás consiste en usar correlaciones conocidas del coeficiente de arrastre estacionario, especificando una velocidad relativa apropiada en la estela (Yuan y Prosperetti, 1994). Zhang y Fan (2002), proponen como esta velocidad, el perfil asintótico promediado sobre el área frontal proyectada por la esfera de atrás ( $\bar{w}$ ). En este análisis se conserva esta suposición, así que

$$F_{d2} = C_{d2} \frac{\pi}{4} d^2 \frac{1}{2} \rho \bar{w}^2, \quad (10)$$

donde  $\bar{w}$  se define como:

$$\bar{w} = \frac{4}{\pi d^2} \int_0^{d/2} w(r, s) 2\pi r dr. \quad (11)$$

Al sustituir la Ec. (1) en la Ec. (11) e integrar la expresión resultante se obtiene

$$W \doteq \frac{\bar{w}}{u_1} = 1 - \frac{C_{d1}}{2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Re_1}{16} \frac{d}{s}\right) \right]. \quad (12)$$

Aquí  $W$  es la razón entre la velocidad promedio en la estela del cuerpo de adelante y la velocidad del flujo uniforme.

Al dividir la Ec. (10) entre la Ec. (2) se llega a la siguiente expresión para el arrastre sobre el cuerpo de atrás:

$$\frac{F_{d2}}{F_{d1}} = W, \quad (13)$$

la cual fue obtenida anteriormente por Zhang y Fan (2002). En esta ecuación únicamente se ha considerado la principal dependencia del coeficiente de arrastre estacionario  $C_d$  con respecto al número de Reynolds, es decir,  $C_d \propto Re^{-1}$ .

Adimensionalizando la Ec. (8) mediante la Ec. (2) y considerando las Ecs. (9) y (13), obtenemos la siguiente expresión para la fuerza hidrodinámica sobre el cuerpo de atrás:

$$\frac{F}{F_{d1}} = W + \frac{1}{F_{d1}} \int_{\mathcal{A}_s} [p_a - p_b] dA. \quad (14)$$

Para poder estimar el segundo término del lado derecho de la ecuación anterior es necesario evaluar la presión en ambos extremos (tapas) de la superficie de control (a una distancia  $s_t$  medida desde la superficie de ambos cuerpos, como se muestra en la Fig. 2). El campo de presión en la estela del cuerpo de adelante puede ser evaluado con buen grado de aproximación sustituyendo la Ec. (11) en la componente axial de la ecuación de movimiento (Ec. (18)). No obstante, actualmente se carece de una expresión analítica a  $Re$  intermedios para evaluar el campo de presión en la estela de un cuerpo interactuando con la estela de otro cuerpo. Intentar abordar este problema está más allá del alcance del presente trabajo. Una forma de simplificar el problema, consiste en suponer un diámetro de esfera mucho menor respecto a una longitud característica de variación del campo local del flujo no perturbado por la presencia de la esfera ( $L$ ), o sea,  $d/L \ll 1$ . Usando esta suposición, Maxey y Riley (1983) demostraron que, independientemente del  $Re$ , la esfera está sujeta a una fuerza debida a la aceleración lagrangiana del fluido, ocasionada por la existencia de un gradiente de presión. Además, la presencia del cuerpo desacelera el movimiento de una cierta cantidad de fluido de los alrededores, resultando en una resistencia inercial adicional, mejor conocida como fuerza de masa agregada (Magnaudet y Eames, 2000). Sin embargo, esta suposición implica que el gradiente de presión es aproximadamente uniforme sobre la esfera. No obstante, como se discutirá en la siguiente sección, a distancias pequeñas de separación entre esferas, la variación del gradiente de presión en la estela, en una longitud característica igual al tamaño de la esfera, dista mucho de ser uniforme.

Por otro lado, observaciones experimentales (Liang y col., 1996) junto con simulaciones numéricas de un tren de partículas sólidas (Tal y col., 1984) han revelado que la estructura del flujo en la estela detrás de cada partícula en un par (o tren) es similar. Yuan y Prosperetti (1994), resolvieron las ecuaciones de Navier-Stokes para la interacción en línea de dos burbujas esféricas del mismo diámetro en el régimen  $20 \leq Re \leq 200$  y predijeron también una similitud en la estructura del flujo detrás de ambas burbujas. Considerando lo anterior, la suposición básica en este trabajo para la estimación de la presión en ambos extremos del cilindro es que la estructura del flujo en la estela del cuerpo de adelante es similar a la estructura del flujo en la estela del cuerpo de atrás. Esta similitud se establece al considerar que la razón entre la velocidad promedio en la estela del cuerpo de adelante y la velocidad del flujo uniforme ( $u_1$ ), es aproximadamente igual a la razón entre la velocidad promedio en la estela del cuerpo de atrás y una velocidad característica del flujo incidente sobre este cuerpo ( $u_2$ ). Así, la velocidad del flujo en ambos

extremos del cilindro puede expresarse a partir de la Ec. (12) como

$$\frac{\bar{w}_b}{u_2} \cong \frac{\bar{w}_a}{u_1} = 1 - \frac{C_{d1}}{2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Re_1 d}{16 s}\right) \right]. \quad (15)$$

De acuerdo a la física del problema  $u_2 < u_1$ . Es decir, debido al efecto de escudo del cuerpo de adelante, el caudal que incide sobre el cuerpo de atrás (en la misma área proyectada por ambos cuerpos) es menor al caudal que incide sobre el cuerpo de adelante ( $\pi/4 d^2 u_2 < \pi/4 d^2 u_1$ ).

La componente axial de la ecuación de movimiento evaluada en ambos extremos del cilindro se describe en forma aproximada por

$$u_* \frac{d\bar{w}_*}{ds} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds}, \quad (16)$$

donde  $u_* = u_1$  y  $\bar{w}_* = \bar{w}_a$  (extremo inferior); o también  $u_* = u_2$  y  $\bar{w}_* = \bar{w}_b$  (extremo superior) y  $p$  es la presión dinámica. Derivando la Ec. (15) y sustituyendo el resultado en la Ec. (16) se obtiene

$$\frac{dp}{ds} = C_{d1} \frac{1}{2} \rho u_*^2 \exp\left(-\frac{Re_1 d}{16 s}\right) \frac{Re_1 d}{16 s^2}. \quad (17)$$

Al integrar la ecuación anterior con la condición límite, para  $s \rightarrow \infty$ ,  $p = 0$ , se llega a la siguiente solución aproximada para el campo de presión:

$$p = C_{d1} \frac{1}{2} \rho u_*^2 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Re_1 d}{16 s}\right) \right]. \quad (18)$$

Sustituyendo la Ec (18) en la Ec. (14) (con  $u_* = u_1$  para estimar  $p_a$  y  $u_* = u_2$  para estimar  $p_b$ ) y tomando en cuenta que  $p$  es independiente de  $r$ , se elige  $\mathcal{A} =$  área proyectada por ambas esferas ( $\pi/4 d^2$ ). Al integrar la expresión resultante se llega a la siguiente expresión adimensional para la fuerza hidrodinámica sobre el cuerpo de atrás, la cual constituye la principal contribución de este trabajo:

$$\frac{F}{F_{d1}} = W + (1 - \beta^2) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Re_1 d}{16 s}\right) \right], \quad (19)$$

donde  $\beta$  representa la razón entre una velocidad característica del flujo incidente sobre el cuerpo de atrás y la velocidad del flujo uniforme incidente sobre el cuerpo de adelante, es decir  $\beta = u_2/u_1$ . El valor de  $\beta$  se estimará en la siguiente sección usando datos experimentales reportados en la literatura. Debe notarse que en esta expresión, la fuerza hidrodinámica sobre la esfera de atrás se reduce a la fuerza de arrastre de una esfera aislada a una distancia de separación entre cuerpos infinita ( $s/d \rightarrow \infty$ ).

En la Ec. (19), el primer término del lado derecho contiene el efecto de la fuerza de arrastre sobre el cuerpo de atrás, mientras que el último término representa la contribución de las fuerzas de presión. Consecuentemente, no considerar el efecto del gradiente de presión, tal como ha sido el caso de

trabajos previos (Zhu y col., 1994; Liang y col., 1996; Chen y Wu, 2000; Zhang y Fan, 2002), equivale a despreciar las fuerzas repulsivas de presión.

### 3. Resultados y discusión

Las dos principales características de la expresión para la fuerza hidrodinámica sobre un cuerpo interactuando con la estela laminar estacionaria del cuerpo de adelante obtenida en este trabajo son: (i) La consideración del efecto de la estela no sólo como una reducción en la fuerza de arrastre cuasiestacionaria, sino también a través de la incorporación de las fuerzas presión. (ii) La incorporación del parámetro  $\beta$ , el cual representa la razón entre una velocidad característica del flujo incidente sobre el cuerpo de atrás y la velocidad del campo de flujo uniforme incidente sobre el cuerpo de adelante, su valor debe estar entre  $0 < \beta < 1$ . De acuerdo a la Ec. (19), el suponer  $\beta = 1$  equivale a despreciar el efecto del gradiente de presión; es decir, la fuerza hidrodinámica experimentada por la esfera de atrás sería únicamente la fuerza de arrastre cuasiestacionaria. Mientras que el suponer  $\beta = 0$  equivale a decir que no existe flujo en la estela de la esfera de adelante. La única posibilidad para que se presentara esta situación sería que la esfera de adelante frenara totalmente el flujo hacia la esfera de atrás, en consecuencia, no existiría flujo en la estela ( $W = 0$ ) y la presión dinámica sería  $p_a = p_b = 0$ . Por lo tanto, usando la expresión dada en la Ec. (14) se observa que en este escenario el cuerpo de atrás no experimentaría una fuerza hidrodinámica.

Para comparar las predicciones de nuestro modelo para  $F/F_{d1}$ , estimar el valor de  $\beta$  y analizar el efecto de las fuerzas incorporadas en la Ec. (19), se utilizan datos experimentales de Zhu y col. (1994). El coeficiente estacionario de arrastre para una esfera aislada se estima mediante la correlación  $C_{d1} = 24/Re(1 + 0.15 Re^{0.687})$  (Schiller and Nauman, 1933) válida para  $Re < 800$ . En la estimación del valor óptimo de  $\beta$  a  $Re_1$  de 54, 92 y 106 se usa el método del gradiente conjugado (Axelsson y Barrer, 1984) para minimizar la función objetivo (Ec. (20)). Los valores obtenidos de  $\beta$  y el promedio aritmético de ellos ( $\bar{\beta}$ ) se reportan en la Tabla 1. Como se esperaba, el valor de  $\beta$  para los tres regímenes de flujo estudiados es siempre menor a la unidad. Así, debido al efecto de escudo del cuerpo de adelante, el caudal que incide sobre el cuerpo de atrás es menor al caudal que incide sobre el cuerpo de adelante.

Se observa en la Tabla 1 que existe una cierta dependencia de  $\beta$  con el  $Re$ . Sin embargo, investigar dicha funcionalidad, con la finalidad de obtener una expresión de este parámetro en función del  $Re$  requiere de más información experimental. Por lo

tanto, en este trabajo no se realizará un análisis sobre esta funcionalidad.

Tabla 1. Valores óptimos del parámetro  $\beta$ .

| $Re_1$        | $\beta = u_2/u_1$ |
|---------------|-------------------|
| 54            | 0.945             |
| 92            | 0.976             |
| 106           | 0.958             |
| $\bar{\beta}$ | 0.960             |

Para estimar el error estadístico promedio entre las predicciones del modelo de Zhang y Fan (2002) y el obtenido con la Ec. (19), se utilizan las mediciones experimentales y la siguiente definición del error relativo promedio (Bevington y Robinson, 1992):

$$\%Er = \sum_i^N \frac{1}{N} \frac{[(Exp)_i - (Pred)_i]}{(Exp)_i} \times 100. \quad (20)$$

Los valores obtenidos a partir de la Ec. (20) están reportados en la Tabla 2. Se observa que aunque ambos modelos dan una buena aproximación de las mediciones experimentales, el modelo obtenido en este trabajo da siempre una mejor predicción, con un intervalo de error entre 1.42% para  $Re_1=106$  y 3.78% para  $Re_1=54$  (usando  $\beta$ ), mientras que para  $Re_1=106$  y  $Re_1=54$  (usando  $\bar{\beta}$ ), el intervalo de error está entre 1.54% y 5.78%, respectivamente. Usando el modelo de Zhang y Fan (2002) se obtiene un error entre 5.57% ( $Re_1=92$ ) y 11.53% ( $Re_1=54$ ). Esta diferencia se adjudica a la adición de los efectos inerciales del gradiente de presión en la fuerza hidrodinámica.

Tabla 2. Comparación del error relativo promedio,  $Er$  del modelo de Zhang y Fan (2002) (Ec. (13)) y el propuesto (Ec. (19)).

| $Re_1$ | %Er usando $\beta$ | %Er usando $\bar{\beta}$ | %Er Zhang y Fan (2002) |
|--------|--------------------|--------------------------|------------------------|
| 54     | 3.78%              | 5.78%                    | 11.53%                 |
| 92     | 1.87%              | 4.95%                    | 5.57%                  |
| 106    | 1.42%              | 1.54%                    | 9.58%                  |

Como puede verse en la Tabla 2, para  $Re_1=54$  y 92, al usar el valor óptimo de  $\beta$  se obtiene la mejor predicción cuantitativa de la Ec. (19). Sin embargo, como se discutió anteriormente, no es plausible con los datos experimentales actuales proponer una expresión para  $\beta$ . Por lo tanto, con el propósito de comparar y utilizar el modelo obtenido (Ec. (20)) en su régimen de flujo de validez ( $24 < Re < 130$ ), se propone como una alternativa inicial usar  $\beta = \bar{\beta} = 0.96$ .

En la Fig. 3 se grafican las contribuciones individuales  $F_i/F_{d1}$ , donde  $F_i$  denota  $F_{d2}$ , la fuerza de presión ( $F_p$ ) o  $F$  en función de la distancia  $s/d$

para un número de Reynolds de 54. La suma de las dos fuerzas, arrastre y presión, producen la fuerza hidrodinámica dada por la Ec. (19). El modelo obtenido predice que para una distancia adimensional de separación  $s/d = 3$ , la fuerza de presión contribuye con aproximadamente un 10% en la fuerza hidrodinámica total. La fuerza de arrastre cuasiestacionaria considerada en la Fig. 3, es equivalente al modelo de Zhang y Fan (2002) dado en la Ec. (13) para el arrastre sobre una partícula interactiva, y por lo tanto, es conveniente compararlo con la fuerza hidrodinámica calculada con la Ec. (19). Esta comparación se muestra también en las Figs. 4 y 5 para  $Re_1 = 92$  y  $Re_1 = 106$ , respectivamente. Como se observa en estas figuras, ambos modelos dan una buena predicción de los resultados experimentales. Sin embargo, es evidente que existe una mejor predicción del presente modelo.

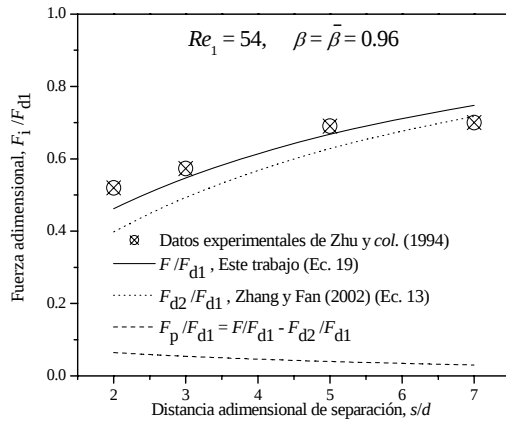


Fig. 3. Fuerza hidrodinámica adimensional y contribución de las fuerzas de arrastre y presión.

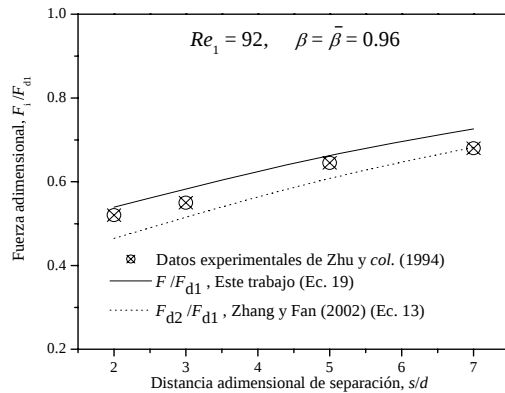


Fig. 4. Fuerza hidrodinámica y de arrastre adimensional.

Ahora, adimensionalizando las Ecs. (17) y (18) mediante la Ec. (2) y sustituyendo  $u_* = u_1$ , se obtienen las siguientes expresiones para el campo de presión y su gradiente en la estela del cuerpo de adelante

$$S \frac{p}{F_{d1}} = 4 \left[ 1 - \exp \left( - \frac{Re_1 d}{16 s} \right) \right] \quad (21)$$

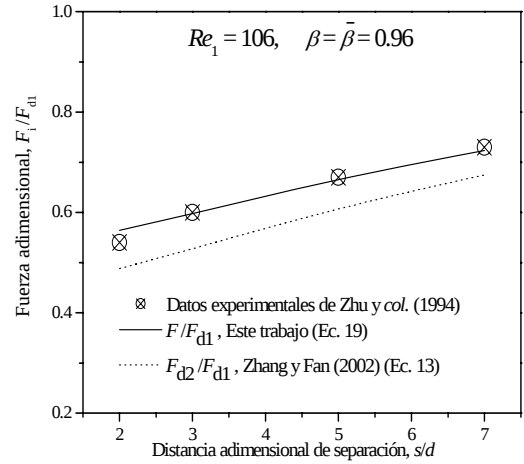


Fig. 5. Fuerza hidrodinámica y de arrastre adimensional.

$$y \quad V \frac{dp}{ds} / F_{d1} = \frac{2}{3} \exp \left( - \frac{Re_1 d}{16 s} \right) \frac{Re_1}{16} \left( \frac{d}{s} \right)^2, \quad (22)$$

siendo  $S = \pi d^2$  y  $V = \pi/6 d^3$  la superficie y el volumen de la esfera, respectivamente. El perfil asintótico es válido para distancias de separación entre esferas mayores al tamaño de los anillos vorticosos. Sin embargo, con la finalidad de alcanzar una mayor comprensión (aunque sea cualitativa) de la importancia de las fuerzas de presión sobre la esfera de atrás; en la Fig. 6 se grafica (para  $Re_1 = 54$ ), tanto el campo de presión como su gradiente hasta pequeñas distancias de separación. Se observa que cuando la distancia entre cuerpos disminuye, tanto el campo de presión como su gradiente se incrementan drásticamente hasta  $s/d \approx 1.5$ , donde existe un punto de inflexión del campo de presión (su gradiente es máximo).

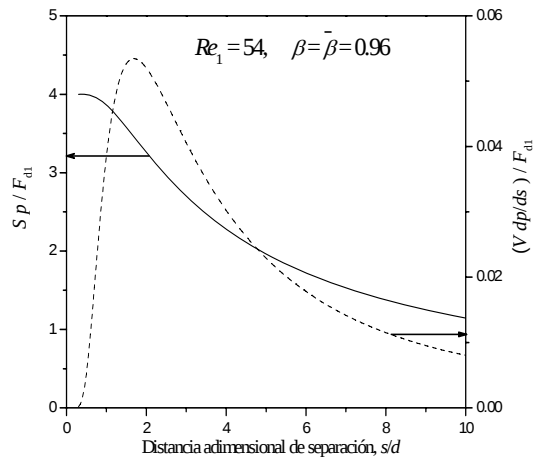


Fig. 6. Campo de presión axial y gradiente del campo de presión en la estela de la esfera de adelante.

Los resultados obtenidos son congruentes con los resultados de Lamb (1932) para la interacción en línea de un par de esferas en el régimen de flujo potencial. Lamb encontró que la presencia del cuerpo de adelante comunica fuerzas de presión sobre el cuerpo de atrás, esto se debe a que el flujo en la estela es más lento (tiene una mayor presión) que el flujo fuera de la estela. De acuerdo a los resultados obtenidos, se concluye que a pequeñas distancias de separación las fuerzas de presión son significativas, por lo que deberían ser consideradas en los modelos. Estos resultados también coinciden con los de Katz y Meneveau (1996) para el caso de dos burbujas esféricas interactivas ascendiendo en línea.

### Conclusiones

Al estudiar la interacción de dos esferas alineadas en la misma dirección de un flujo uniforme, se obtuvo una expresión adimensional para la fuerza hidrodinámica sobre la esfera de atrás. La expresión es válida para distancias de separación entre cuerpos mayores a la dimensión de los anillos vorticosos que se forman detrás del cuerpo de adelante. Su régimen de flujo de validez requiere que los anillos vorticosos sean cerrados y sin oscilaciones (la estela sea laminar y estacionaria). La aproximación del modelo con los datos experimentales de Zhu y col. (1994) confirman que éste contiene las fuerzas más significativas que ejerce el fluido sobre el cuerpo de atrás. Es decir, la fuerza de arrastre cuasiestacionaria y las fuerzas de presión. Además, se encontró que para distancias muy grandes de separación entre cuerpos la fuerza de arrastre constituye el total de la fuerza hidrodinámica sobre el cuerpo de atrás. Sin embargo, a medida que la distancia de separación disminuye, las fuerzas repulsivas de presión adquieren importancia; no obstante, la fuerza de arrastre cuasiestacionaria es siempre la fuerza dominante.

En resumen, el efecto de la estela sobre el cuerpo de atrás como se estudió en este trabajo, considera no sólo la reducción del arrastre cuasiestacionario, sino también el efecto repulsivo de las fuerzas de presión. Cuando ambas fuerzas son tomadas en cuenta, aún utilizando el perfil de velocidad asintótico, se obtienen mejores predicciones de las mediciones experimentales respecto al modelo que no considera las fuerzas de presión.

### Agradecimientos

La realización de este trabajo se llevó a cabo gracias al apoyo brindado por CONACyT a través del otorgamiento de una beca de estudios de posgrado a uno de los autores (JRM).

### Nomenclatura

|                         |                                                                                                                                                        |
|-------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathcal{A}$           | superficie del volumen de control cilíndrico mostrado en la Fig. 2, ( $m^2$ )                                                                          |
| $C_d$                   | coeficiente de arrastre de una esfera aislada, (adimensional)                                                                                          |
| $d$                     | diámetro de la esfera, (m)                                                                                                                             |
| $dA$                    | elemento diferencial de superficie, ( $m^2$ )                                                                                                          |
| $\hat{e}_r$             | componente radial de la base vectorial de un sistema coordenado cilíndrico, (adimensional)                                                             |
| $\hat{e}_s$             | componente axial de la base vectorial de un sistema coordenado cilíndrico, (adimensional)                                                              |
| $Er$                    | error relativo promedio definido en la Ec. (20), (adimensional)                                                                                        |
| $F$                     | fuerza hidrodinámica, (N)                                                                                                                              |
| $F_d$                   | fuerza de arrastre, (N)                                                                                                                                |
| $F$                     | componente axial de la fuerza hidrodinámica, (N)                                                                                                       |
| $F_i$                   | contribuciones individuales a la fuerza hidrodinámica, (N)                                                                                             |
| $F_p$                   | fuerzas de presión, (N)                                                                                                                                |
| $I$                     | tensor unitario, (adimensional)                                                                                                                        |
| $L$                     | longitud característica de variación del campo local del flujo no perturbado por la presencia de la esfera, (m)                                        |
| $\hat{n}$               | vector normal unitario, (adimensional)                                                                                                                 |
| $N$                     | número de datos experimentales, (adimensional)                                                                                                         |
| $p$                     | presión dinámica del fluido, (Pa)                                                                                                                      |
| $r$                     | coordenada radial del marco de referencia anclado en la esfera, (m)                                                                                    |
| $s$                     | coordenada axial del marco de referencia anclado en la esfera, (m)                                                                                     |
| $Re$                    | número de Reynolds de partícula, (adimensional)                                                                                                        |
| $R_1$                   | distancia entre orígenes de ambos marcos de referencia, (m)                                                                                            |
| $S$                     | superficie de la esfera, ( $m^2$ )                                                                                                                     |
| $u_1$                   | velocidad del campo de flujo uniforme que incide sobre la esfera de adelante en el marco de referencia anclado en la esfera, ( $ms^{-1}$ )             |
| $u_2$                   | velocidad característica del flujo no-uniforme incidente sobre la esfera de atrás en el marco de referencia anclado en la esfera, ( $ms^{-1}$ )        |
| $V$                     | volumen de la esfera, ( $m^3$ )                                                                                                                        |
| $w$                     | campo de velocidad de la estela en el marco de referencia anclado en la esfera, ( $ms^{-1}$ )                                                          |
| $W$                     | como se define en la Ec. (12), (adimensional)                                                                                                          |
| $w(r, s)$               | componente axial de $w$ , ( $ms^{-1}$ )                                                                                                                |
| $\bar{w}$               | componente axial del campo de velocidad de la estela promediada en el área frontal de la esfera de atrás, como se define en la Ec. (11), ( $ms^{-1}$ ) |
| $(x, y, z)$             | marco de referencia de laboratorio en coordenadas cartesianas, (m)                                                                                     |
| <b>Símbolos griegos</b> |                                                                                                                                                        |
| $\beta$                 | representa la razón entre una velocidad característica del flujo no-uniforme incidente                                                                 |

|                        |                                                                                                                  |
|------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                        | sobre el cuerpo de atrás y la velocidad del flujo uniforme incidente sobre el cuerpo de adelante, (adimensional) |
| $\bar{\beta}$          | promedio aritmético de $\beta$ , (adimensional)                                                                  |
| $\mu$                  | viscosidad dinámica del fluido, ( $\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$ )                                              |
| $\nu$                  | viscosidad cinemática del fluido, ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ )                                                  |
| $\rho$                 | densidad del fluido, ( $\text{kg m}^{-3}$ )                                                                      |
| $\tau$                 | tensor de esfuerzos viscosos, (Pa)                                                                               |
| $\tau_{rs}, \tau_{ss}$ | componentes del tensor de esfuerzos viscosos, (Pa).                                                              |
| <b>Subíndices</b>      |                                                                                                                  |
| a                      | región de la tapa inferior del cuerpo cilíndrico mostrado en la Fig. 2                                           |
| b                      | región de la tapa superior del cuerpo cilíndrico mostrado en la Fig. 2                                           |
| c                      | región de la superficie del cuerpo cilíndrico mostrado en la Fig. 2                                              |
| 1                      | esfera de adelante                                                                                               |
| 2                      | esfera de atrás                                                                                                  |
| *                      | variable auxiliar para los subíndices a y b ó 1 y 2.                                                             |

## Referencias

- Axelsson, O. y Barker, V.A. (1984). *Finite element solution of boundary value problems*. Academic Press, Orlando, USA.
- Batchelor, G.K. (1967). *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido.
- Bevington, P.R. Y Robinson, D.K. (1992). *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*. McGraw-Hill (2nd edition), New York, USA.
- Chen, R. y Wu, J. (2000). The flow characteristics between two interactive spheres. *Chemical Engineering Science* 55, 1143-1158.
- Katz, J. y Meneveau, C. (1996). Wake-induced relative motion of bubbles rising in line. *International Journal of Multiphase flow* 22, 239-258.
- Lamb, H. (1932). *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido.
- Landau, L. y Lifshitz, E. (1958). *Fluid Mechanics*. 2nd edn. Butterworth Heinemann, Oxford, Reino Unido.
- Lawrence, C.J. y Mei, R. (1995). Long-time behavior of the drag on a body in impulsive motion. *Journal of Fluid Mechanics* 283, 307-327.
- Liang, S.-C., Hong, T. y Fan, L.-S. (1996). Effects of particle arrangements on the drag force of a particle in the intermediate flow regime. *International Journal of Multiphase flow* 22, 285-306.
- Magnaudet, J. y Eames, I. (2000). The motion of high-Reynolds-number bubbles in inhomogeneous flows. *Annual Review of Fluid Mechanics* 32, 659-708.
- Maxey, M.R. y Riley, J.J. (1983). Equation of motion of a small rigid sphere in a non-uniform flow. *Physic of Fluids* 26, 883-889.
- Mei, R., Klausner, J.F. y Lawrence, C.J. (1994). A note on the history force on a spherical bubble at finite Reynolds number. *Physic of Fluids* 6, 418-420.
- Michaelides, E.E. (2003). Hydrodynamic force and heat/mass transfer from particles, bubbles, and drops-the freeman scholar lecture. *Journal of Fluids Engineering* 125, 209-238.
- Ruzicka, M.C. (2000). On bubbles rising in line. *International Journal of Multiphase flow* 26, 1141-1181.
- Ruzicka, M.C. (2005). Vertical stability of bubble chain: Multiscale approach. *International Journal of Multiphase flow* 31, 1063-1096.
- Schiller, L. and Nauman, A., (1933). Über die grundlegende Berechnung bei der Schwebkraftaufbereitung. *Ver. Deutch. Ing.* 44, 318-320.
- Schlichting, H. (1979). *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, New York, EUA.
- Tal, R., Lee, D.N., y Sirignano, W.A. (1983). Hydrodynamics and heat in sphere assemblages - cylindrical cell models. *International Journal Heat Mass Transfer* 26, 1265-1273.
- Yuan, H. y Prosperetti, L.A. (1994). On the in-line motion of two spherical bubbles in a viscous fluid. *Journal of Fluid Mechanics* 278, 325-349.
- Zhang, J. y Fan, L.-S. (2002). A semianalytical expression for the drag force of an interactive particle due to wake effect. *Industrial Engineering Chemical Research* 41, 5094-5097.
- Zhang, J. y Fan, L.-S. (2003). On the rise velocity of an interactive bubble in liquids. *Chemical Engineering Journal* 92, 169-176.
- Zhu, C., Liang, S.-C. y Fan, L.-S. (1994). Particle wake effects on the drag force of an interactive particle. *International Journal of Multiphase flow* 20, 117-129.